2Л

УДК 519.6

О.М. Литвин, Ю.І. Першина
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків
academ@kharkov.ua, yulia_pershina@mail.ru

Математичне моделювання процесів, які мають розриви, за допомогою розривних інтерполяційних сплайнів

У роботі запропонований метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайна для наближення функції однієї змінної, що має хоча б один розрив першого роду у вузлах розбиття області визначення функції, використовуючи метод мінімакса. Визначений загальний вигляд похибки наближення функції побудованою розривною конструкцією в інтегральному вигляді, та наведені оцінки похибки наближення в кожному інтервалі розбиття. Запропонований метод можна буде використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Вступ

Задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів [1], [2]. Наприклад, при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду при переході від однієї складової кори до іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкта. Наприклад, в роботі [3] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структуру тіла. Тому актуальною є розробка та дослідження математичних моделей розривних процесів.

Постановка задачі

Нехай досліджуваний процес описується функцією однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ та відомі точки розриву процесу x_k, $k=\overline{1,n}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі x_k функція має розриви першого роду. Задані вузли розбивають інтервал $[a,b]$ на n частин.

Метою даної роботи є побудова та дослідження математичної моделі заданого розривного процесу із заданими можливими точками розриву у вигляді розривного лінійного інтерполяційного сплайна.

Побудова розривного інтерполяційного сплайна

Визначення. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ наступну функцію:

$$S(x)=Sp_k(x,A)=A_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+A_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}, \tag{1}$$

де

$$A_k^+=f(x_k+0),\qquad A_{k+1}^-=f(x_{k+1}-0).$$

Теорема 1. Функція $S(x)=Sp_k(x),\ k=\overline{1,n}$ задовольняє наступним властивостям:

$$Sp_k(x_k+0)=A_k^+,\qquad Sp_{k-1}(x_k-0)=A_k^-. \tag{2}$$

Доведення. Слід врахувати, що зліва від вузла x_k сплайн $S(x)$ задається формулою:

$$S(x)=Sp_{k-1}(x,A)=A_{k-1}^+\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}+A_k^-\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}},$$

а справа –

$$S(x)=Sp_k(x,A)=A_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+A_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}.$$

Перевіримо виконання інтерполяційних умов (2).

$$Sp_{k-1}(x_k-0,A)=A_{k-1}^+\frac{x_k-x_k}{x_{k-1}-x_k}+A_k^-\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}=A_k^-,$$

$$Sp_k(x_k+0,A)=A_k^+\frac{x_k-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+A_{k+1}^-\frac{x_k-x_k}{x_{k+1}-x_k}=A_k^+.$$

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Якщо на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ невідомі параметри A_k^+, A_{k+1}^- знаходити з умови

$$\max_{1\le k\le n-1}\ \max_{x_k\le x\le x_{k+1}}\left|f(x)-Sp_k(x)\right|\to\min_A, \tag{3}$$

то отримаємо розривний апроксимаційний сплайн, який є сплайном найкращого наближення.

Доведення випливає з того, що кожний з елементів, який треба мінімізувати, дорівнює максимальному відхиленню наближуючого сплайна від функції $f(x)$. Тому, при знаходженні параметрів з умови (2), отримаємо $A_{k,1}$, $A_{k,2}$, які забезпечують найменше відхилення.

Теорема 3. Якщо наближувана функція $f(x)$ є розривною кусково-лінійною функцією з точками розриву $x = x_k$, $k = \overline{1, n}$ і наближуємо її кусково-лінійним розривним сплайном $Sp(x, A)$, що визначається формулами (1), і невідомі A_k^+, A_{k+1}^- знаходимо з умови (3), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто

$$Sp(x, A) = f(x).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ на k-му інтервалі має вигляд

$$f_k(x, B) = B_{k,1}\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+2}} + B_{k,2}\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \; k = \overline{1, n-1}.$$

Розглянемо максимум різниці функції $f(x)$ на наближуваного сплайна (1) на k-му інтервалі:

$$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left| f(x) - Sp_k(x, A) \right| =$$

$$= \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \{ \left| f(x_k + 0) - Sp_k(x_k + 0, A) \right|, \left| f(x_{k+1} - 0) - Sp_k(x_{k+1} - 0, A) \right| \} =$$

$$= \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \{ \left| B_{1,k} - A_{1,k} \right|, \left| B_{2,k} - A_{2,k} \right| \}.$$

Знайдемо максимум за всіма інтервалами та мінімум отриманого максимуму

$$\min \max_{1 \le k \le n-1} \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} \{ \left| B_{1,k} - A_{1,k} \right|, \left| B_{2,k} - A_{2,k} \right| \}.$$

Звідси випливає, що

$$\left| B_{1,k} - A_{1,k} \right| = 0, \left| B_{2,k} - A_{2,k} \right| = 0 \Rightarrow B_{1,k} = A_{1,k}, \, B_{2,k} = A_{2,k}.$$

Теорема доведена.

Визначимо вигляд похибки наближення розривним сплайном (1) та оцінку наближення розривної функції побудованим сплайном, які наведені в роботі [4].

Теорема 4. Якщо $f(x) \in C^r[a,b], \, r = 1, 2$, то залишок $Rf(x) = f(x) - S(x)$ на кожному інтервалі розбиття буде мати вигляд:

$$Rf(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(r)}(\xi) G(x, \xi) d\xi, \; x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \dfrac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \le \xi \le x \le x_{k+1}, \\ -\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \le x \le \xi \le x_{k+1}. \end{cases}$$

Теорема 5. Оцінка похибки наближення двічі диференційованої функції $f(x)$ побудованим розривним інтерполяційним сплайном $S(x) = Sp_k(x)$ на кожному інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ має вигляд:

$$f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow \sup_{x_k \le x \le x_{k+1}} \left| f(x) - Sp_k(x) \right| \le \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \times \left\| f'(x) \right\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}$$

$$f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow \left\| R(x) \right\|_\infty \le \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \times \left\| f''(x) \right\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}$$

Зауваження. Якщо $A_k^+ = A_k^- = f(x_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, то побудований розривний інтерполяційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним інтерполяційним сплайном.

Побудований розривний інтерполяційний сплайн $S(x)$ у вигляді формули (1) є математичною моделлю розривного процесу, який описується функцією $f(x)$ з розривами у вузлах x_k, $k = \overline{1, n}$.

Приклад 1. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з однією точкою розриву $x = 0$ першого роду (рис. 1):

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ x-1, & 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

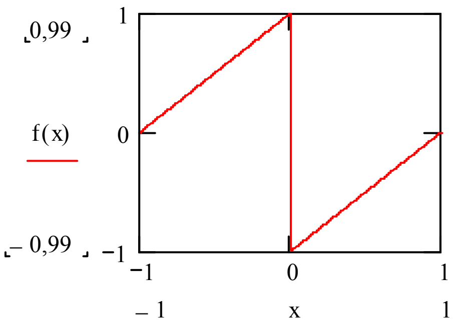


Рисунок 1 – Графічний вигляд наближуваної функції в прикладі 1

Обираємо вузли сплайна: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Вважаємо заданими односторонні значення функції у вузлах:

$$A_1^+ = f(x_1 + 0) = 0, \qquad A_2^+ = f(x_2 + 0) = -1,$$

$$A_2^- = f(x_2 - 0) = 1, \qquad A_3^- = f(x_3 - 0) = 0.$$

Наближуємо функцію $f(x)$ інтерполяційним сплайном вигляду:

$$Sp(x) = \begin{cases} A_1^+ \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} + A_2^- \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2 \\ A_2^+ \dfrac{x - x_3}{x_2 - x_3} + A_3^- \dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2}, & x_2 < x < x_3 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0 \\ x-1, & 0 < x < 1 \end{cases}. \qquad (4)$$

Як бачимо, інтерполяційний сплайн точно наближує задану лінійну функцію, що і підтверджує вищевикладену теорію.

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (1). Коефіцієнти матриці A знаходимо, застосовуючи теорему 2, тобто розв'язуємо мінімізаційну задачу:

$$\max_{1\le k\le n-1}\left|f(x)-Sp_k(x,A)\right|\to\min_{A}.$$

В результаті отримаємо таку матрицю A:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції в прикладі 1 буде мати вигляд:

$$Sp(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0\\ x-1, & 0<x<1\end{cases},$$

що повністю збігається з побудованим інтерлінаційним сплайном.

Приклад 2. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з двома точками розриву $x=-0.5, x=0.5$ першого роду (рис. 1)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -1\le x<-0.5,\\ x, & -0.5\le x<0.5,\\ x^2-1, & 0.5\le x\le 1,\end{cases}.$$

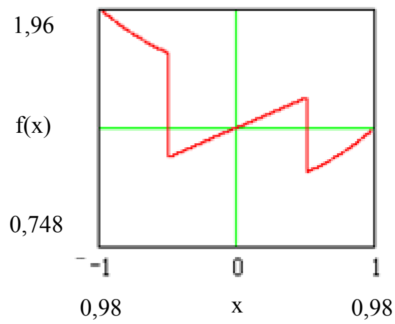


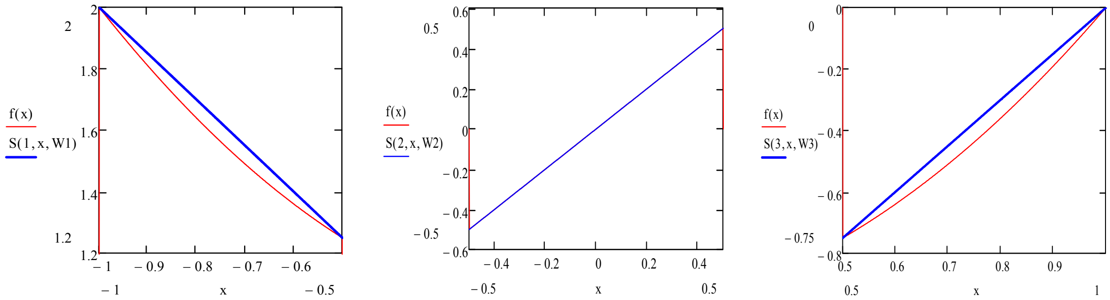
Рисунок 2 – Графічний вигляд наближуваної функції в прикладі 2

Обираємо вузли сплайна: $x_1=-1$, $x_2=-0.5$, $x_3=0.5$, $x_4=1$. Вважаємо заданими односторонні значення функції у вузлах:

$$A_1^+=f(x_1+0)=2, \qquad A_3^-=f(x_3-0)=0.5,$$
$$A_2^-=f(x_2-0)=1.25, \qquad A_3^+=f(x_3+0)=-0.75,$$
$$A_2^+=f(x_2+0)=-0.5, \qquad A_4^-=f(x_4-0)=0.$$

Наближуючий інтерполяційний сплайн, згідно з формулою (1), буде мати вигляд (рис. 3):

$$Sp(x)=\begin{cases}-1,5x+0,5; & -1<x<-0,5;\\ x; & -0,5<x<0,5;.\\ 1,5x-1,5; & 0,5<x<1.\end{cases}$$



а) б) в)

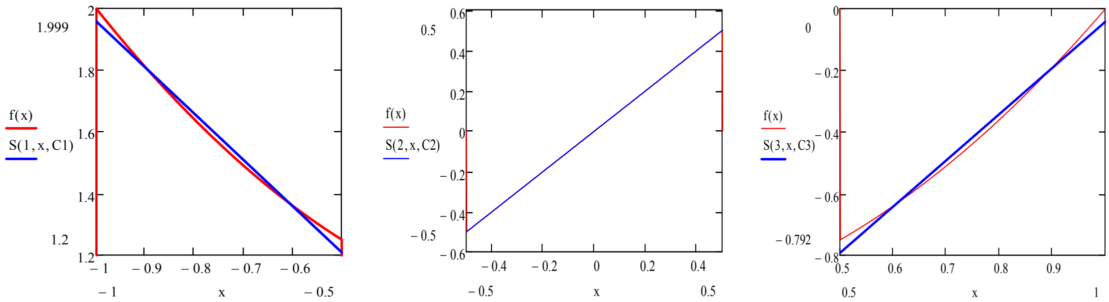
Рисунок 3 – Графічний вигляд функції $f(x)$ та наближуючого інтерполяційного сплайна $Sp(x)$ на інтервалі: а) $(-1;-0,5)$, б) $(-0,5;0,5)$, в) $(0,5;1)$

Максимальне відхилення функції $f(x)$ від побудованого інтерполяційного сплайна дорівнює

$$\max\left|f(x)-Sp(x)\right|\approx 0,06.$$

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (4), де коефіцієнти матриці A знаходяться з умови (3), тобто сплайн набуває вигляду (рис. 5):

$$Sp(x)=\begin{cases}-1,5x+0,46; & -1<x<-0,5;\\ x; & -0.5<x<0,5;\\ 1,5x-1,54; & 0,5<x<1.\end{cases}$$



а) б) в)

Рисунок 4 – Графічний вигляд функції $f(x)$ та наближуючого апроксимаційного сплайна $Sp(x)$ на інтервалі: а) $(-1;-0,5;)$, б) $(-0,5;0,5)$, в) $(0,5;1)$

Максимальне відхилення функції $f(x)$ від побудованого інтерполяційного сплайна дорівнює

$$\max\left|f(x)-Sp(x)\right|\approx 0,02.$$

Висновки

Таким чином, в роботі запропонована математична модель розривного процесу, що описується функцією однієї змінної з можливими розривами першого роду в заданих вузлах, за допомогою розривного лінійного інтерполяційного та апроксимаційного сплайнів.

Побудовану математичну модель можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об’єктів, що мають різну щільність, в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Література

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Корнейчук Н.П. – Москва : Наука, 1984. – 352 с.
2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Варга Р. ; [пер. с англ. Ю.А. Кузнецова]. – Москва : Мир, 1974. – 124 с.
3. Литвин О.М. Про один метод розв’язання 3D задачі комп’ютерної томографії / О.М. Литвин, О.О. Литвин // Тезисы докладов Международной конференции АППММ’06. – Харків : ІПМАШ ім. А.М. Підгорного, 2006. – С. 18.
4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / Литвин О.М. – Х. : Основа, 2002. – 504 с.

Literatura

1. Kornejchuk N.P. Moscow: Nauka. 1984. 352 p.
2. Varga R. Moscow: Mir. 1974. 124p.
3. Litvin O.M. Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferencii APPMM’06. Harkiv: IPMASh im. A.M. Pidgornogo. 2006. P.18
4. Litvin O.M. Harkiv: Osnova. 2002. 504 p.

О.Н. Литвин, Ю.И. Першина

Математическое моделирование процессов, имеющих разрывы, с помощью разрывных интерполяционных сплайнов

В работе предложен метод построения разрывного интерполяционного линейного сплайна для приближения функции одной переменной, имеющей хотя бы один разрыв первого рода в узлах разбиения области определения функции, используя метод минимакса. Определен общий вид погрешности приближения функции построенной разрывной конструкцией в интегральном виде, и приведены оценки погрешности приближения в каждом интервале разбиения. Предложенный метод можно использовать для математического моделирования разрывных процессов в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina

Mathematical Modelling of the Processes Having Ruptures, by Means of Explosive Interpolational Splines

In work the method of construction explosive interpolational linear spline for approach of function of one variable having at least one rupture of the first sort in knots of splitting of a range of definition of function is offered, using a minimax method. The general view of approach error of function by the constructed explosive design in an integrated kind is defined, and estimations of approach error in each interval of splitting are resulted. The offered method can be used for mathematical modelling of explosive processes in medical, geological, space and other researches.

Стаття надійшла до редакції 20.04.2011.